杏林2016

$\boxed{1}$

(1) 以下9を法とする合同式

$2^3 \equiv -1$

$2^6 \equiv 1$

より) $\min n = \underline{6}$ //

$2^{100} = (2^6)^{16} \cdot 2^4$

$\equiv 16$

$\equiv \underline{7}$ //

(2)

$x^{10} = (x+1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c \cdots ①$

↓微分

$10x^9 = \{(x+1)^3 Q(x)\}' + 2ax + b \cdots ②$

↓微分

$90x^8 = \{(x+1)^3 Q(x)\}'' + 2a \cdots ③$

①,②,③に $x=-1$ を代入

$$\begin{cases} 1 = a - b + c \\ -10 = -2a + b \\ 90 = 2a \end{cases}$$

$a=45,\ b=80,\ c=36$

∴余り $\underline{45x^2+80x+36}$ //

(3)

n群のラストは何番目?

$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$

100番目がn群にあるとすると

$2^{n-1} - 1 < 100 \leqq 2^n - 1$

∴ $n = \underline{7}$ //

(6群のラストは $2^6-1=63$ 番目より)

100番目は $\underbrace{100-63=37}_{7群の}$ 項 //

その値は $\frac{2\times 100-1}{2^7} = \underline{\frac{199}{128}}$ //

| | | |
|---|---|---|
| ⑦ | $\frac{2\cdot 2^{n-1}-1}{2^n} \cdots\cdots \frac{2(2^n-1)-1}{2^n}$ | $2^{n-1}$ |

$S_n = \frac{2^n-1+2\cdot 2^n-3}{2^n} \times 2^{n-1} \times \frac{1}{2}.$

$= \frac{3\cdot 2^n - 4}{4}$

$S_7 = \frac{3\cdot 2^7-4}{4} = 3\cdot 2^5 - 1$

$= \underline{95}$ //

$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{1}$ //, $\lim_{n\to\infty} b_n = \underline{2}$ //

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{2^n} = \underline{\frac{3}{4}}$ //

$\boxed{2}$

$t = g(x) = 2^x + 2^{-x}$

↓

$t^2 = 2^{2x} + 2^{-2x} + 2$

より)

$f(x) = h(g(x))$

$= h(t)$

$= 2(t^2-2) - 17k\cdot t + 40k - 7$

$= \underline{2t^2 - 17kt + 40k - 11}$ //

$= (40-17t)k + 2t^2 - 11$

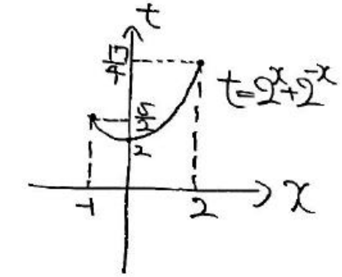
kの値に関わらず〜

$\Leftrightarrow 40 - 17t = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{40}{17}$

∴ $h\left(\frac{40}{17}\right) = 2\frac{1600}{289} - \frac{3179}{289}$

$= \underline{\frac{21}{289}}$ //




$\underline{2} < t \leqq \underline{\frac{5}{2}}$ のとき2個

$t=2$ または $\frac{5}{2} < t \leqq \frac{17}{4}$ のとき1個. それ以外のとき $\underline{0個}$ //

$f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow h(t)=0$ が

① $2<t\leqq\frac{5}{2}$ で1つ, $t=2$ で1つもつ

または

② $2<t\leqq\frac{5}{2}$ で1つ, $\frac{5}{2}<t\leqq\frac{17}{4}$ で1つもつ

①のとき

$h(2) = 6k - 3 = 0$ ∴ $k = \frac{1}{2}$

このとき

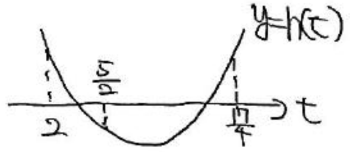
$h(t) = 2t^2 - \frac{17}{2}t + 9$

$= (t-2)\left(2t - \frac{9}{2}\right) = 0$

∴ $t = 2, \frac{9}{4}$ より

$t=\frac{9}{4}$ は $2<t\leqq\frac{5}{2}$ なので適切.

②




(端) $h(2)>0$ , $h(\frac{5}{2})\leqq 0$

$h(\frac{17}{4})\geqq 0$

これらの共通範囲は

$\frac{3}{5}\leqq k\leqq\frac{67}{86}$

①②より $\underline{k=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{5}\leqq k\leqq\frac{67}{86}}$ //

$\boxed{3}$

(1) ア…直線 $\underline{①}$ //

イ…円 $\underline{②}$ // (アポロニウスの円)

ウ… $z=x+yi$ を代入

$\sqrt{x^2+y^2}=1-x$

整理して ウ…放物線 $\underline{⑤}$ //

$|z|=\sqrt{k}\,|z-2|$

↓ 2乗

$x^2+y^2=k\{(x-2)^2+y^2\}$

$\Leftrightarrow (k-1)x^2+(k-1)y^2-4kx+4k=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2k}{k-1}\right)^2+y^2=\frac{4k}{(k-1)^2}$ $(k\neq 1)$

(i)の直線 $y=-x+1$

円と連立して

$\frac{D}{4}=(3k-1)^2-2(k-1)(5k-1)=0$

解くと $k=3\pm 2\sqrt{2}$

(i) $\underline{k=3+2\sqrt{2}}$ // のとき

$x=\frac{3k-1}{2(k-1)}=\cdots=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y=-x+1=\cdots=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \underline{\alpha=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$ //

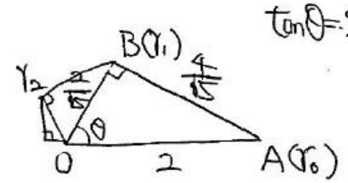
(ii) 同様に $k=3-2\sqrt{2}$ のとき

$\beta=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\alpha\beta=\cdots=\underline{-\sqrt{2}i}$ //

(3)

$\tan\theta=2$




図より) $c=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ //

$AB=\frac{4}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$ //

$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n-\gamma_{n-1}|$

$=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\cdots$

$=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}$

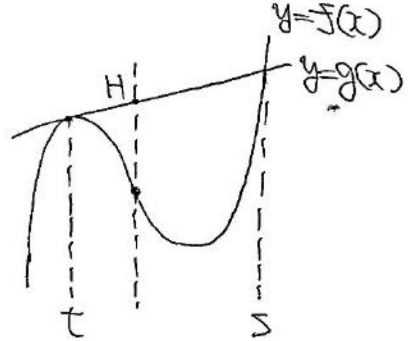
$=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\underline{1+\sqrt{5}}$ //

$\boxed{4}$

(1) $f(x)=3x^3+5x^2+ax+b$

$f'(x)=9x^2+10x+a$

$f''(x)=18x+10$




$\underset{3次}{f(x)}-\underset{1次}{g(x)}=\underline{3}\,//\,(x-s)(x-t)^2$ //

この式の $x^2$ の係数は $\underline{5}$ // より

(右辺) $=3(x-s)(x^2-2tx+t^2)$

$3(-2t-s)=5$

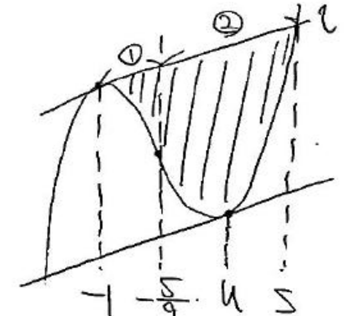
$\therefore\ \underline{2t+s=\frac{-5}{3}}$ //

(2)

(Hの $x$ 座標) = (変曲点の $x$ 座標)

$=\underline{\frac{-5}{9}}$ //

HはSTを $\underline{2:1}$ // に内分




$s=-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times 2=\underline{\frac{1}{3}}$ //

(面積) $=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

$=\frac{3}{12}\left\{\frac{1}{3}-(-1)\right\}^4$

$=\underline{\frac{64}{81}}$ //

平均値の定理 $\underline{⑤}$ // より

($l$ の傾き) $=f'(u)$ なる $u$ が

$-1<u<\frac{1}{3}$ に存在. $u$ は

$-\frac{5}{9}$ と $\frac{1}{3}$ の平均より

$u=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{9}+\frac{3}{9}\right)=\underline{\frac{-1}{9}}$ //