2016慶應薬

[I]

(1)

(i) $P(x)=(x-7)(x-9)Q(x)+px+q$

$\downarrow P(7)=8,\ P(9)=12$

$\begin{cases} 7p+q=8 \\ 9p+q=12 \end{cases}$ $\therefore p=2,\ q=-6$

余り $\underline{2x-6}$ //

(ii)

$2a+b=k(k+1)$

とおく．bを小さく，aを大きくすればいいので，$k(k+1)$が偶数であることをふまえれば $\underline{b=2}$ //

$a=\frac{1}{2}k(k+1)-1$

aは1ケタなので$k=4$とすれば

$\underline{a=9}$ //．$P(x)=0$の実数解をrとすると

$P(x)=(x^2-18x+85)(x-r)$．

$P(7)=8(7-r)=8$ より

$r=\underline{6}$ //

(2) $A(t,-t^2-t+8)$，$B(X,Y)$とおく．

(i) $\begin{cases} \frac{X+t}{2}=1 \iff t=2-X \\ \frac{Y-t^2-t+8}{2}=2 \end{cases}$

$\downarrow$

$Y-(2-X)^2-(2-X)+8=4$

$\iff Y=X^2-5X+2$

$\therefore \underline{y=x^2-5x+2}$ //

(ii)

連立

$-x^2-x+8=x^2-5x+2$

$\iff x^2-2x-3=0$

$\therefore x=-1,3$

$\therefore Q(3,-4)$

$R(k,-k^2-k+8)$，$S(k,k^2-5k+2)$

$\triangle QRS$

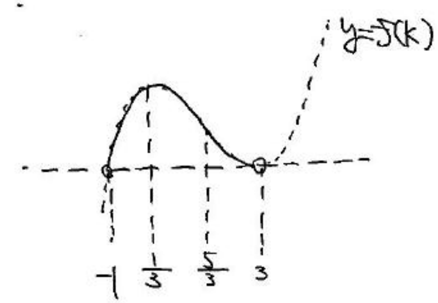
$=|2k^2-4k-6|\times|3-k|\times\frac{1}{2}$

$=(-k^2+2k+3)(3-k)\quad(-1<k<3)$

$=k^3-5k^2+3k+9=f(k)$

$f'(k)=3k^2-10k+3$

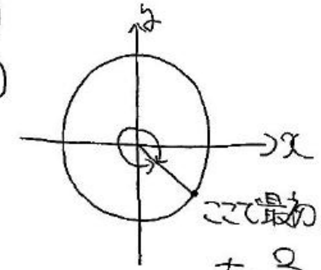
$=(3k-1)(k-3)$



$k=\underline{\frac{1}{3}}$ //で最大

(3)

(i)



$\underline{t=\frac{2}{3}}$ //

(ii)

y_P+y_Q

$=\sin(2\pi t+\frac{\pi}{2})+\sin(-\pi t+\frac{\pi}{2})$

$=\cos 2\pi t+\cos(-\pi t)$

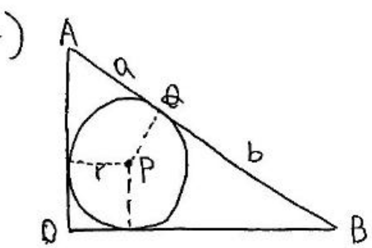
$=\cos 2\varphi+\cos\varphi\quad(\varphi=\pi t)$

$=2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1$

$=2(\cos\varphi+\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$

$\cos\varphi=-\frac{1}{4}$のとき最小値 $\underline{-\frac{9}{8}}$ //

(4)



(i) (3辺の長さの和)

$=\underline{2a+2b+2r}$ //

(ii)

与式を変形．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする．

$(l+m+n)\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+n\vec{b}$

$\iff \overrightarrow{OP}=\frac{m}{l+m+n}\vec{a}+\frac{n}{l+m+n}\vec{b}\ \cdots ①$

また

$\overrightarrow{OP}=\frac{r}{a+r}\vec{a}+\frac{r}{b+r}\vec{b}\ \cdots ②$

ところで $S=\frac{r}{2}(a+b+c)$公式より

$(a+r)(b+r)\frac{1}{2}=r(a+b+r)$

$\iff r^2+ra+rb-ab=0\cdots ③$

①=②より

$\begin{cases} \frac{m}{l+m+n}=\frac{r}{a+r} \iff r=\frac{m}{l+n}a \\ \frac{n}{l+m+n}=\frac{r}{b+r} \iff r=\frac{n}{l+m}b \end{cases}$

③に代入

$\frac{m}{l+n}\cdot\frac{n}{l+m}ab+\frac{n}{l+m}ab+\frac{m}{l+n}ab-ab=0$

$\iff mn+n(l+n)+m(l+m)-(l+n)(l+m)=0$

$\iff m^2+n^2=l^2=17^2$

探すと $\underline{m=15,\ n=8}$ //

$r=\frac{3}{5}a$，$r=\frac{1}{4}b$ より $\underline{\frac{a}{b}=\frac{5}{12}}$ //

[II]

(1)

$(x=0$からaまでの平均変化率$)$

$\times f'\left(\frac{a}{3}\right)=-1$

$\Rightarrow (a^2-a-1)\left(3\frac{a^2}{9}-2\frac{a}{3}-1\right)=-1$

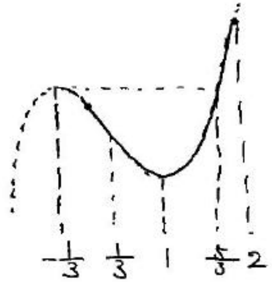
$\Rightarrow (a^2-a-1)(a^2-2a-3)=-3$

探すと $\underline{a=2}$ //

(2) $c=0$のとき

$f'(x)=3x^2-2x-1$

$=(3x+1)(x-1)$



$\max f(x)=f(2)$

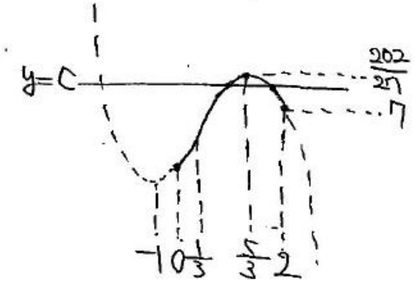
$=8-4-2+0=\underline{2}$ //

(3)

$x^3-x^2-x+c=4x+1$

$\Leftrightarrow c=\underbrace{-x^3+x^2+5x+1}_{h(x)}$

$h'(x)=-3x^2+2x+5=(3x-5)(x+1)$



図より

$\underline{7\leqq c<\frac{202}{27}}$ //

[III]

(1)

$\begin{cases} a_2-a_1=(r_a-1)a_1=2+\sqrt{5} \\ \underbrace{a_3-a_1}_{(r_a^2-1)a_1}=\underbrace{(a_2+a_1)}_{(r_a+1)a_1}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\downarrow$

$r_a-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \underline{r_a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ //

(2)

$a_1=\frac{2}{1+\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$b_n=\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$=\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^n$

$=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

c_4

$=\frac{1}{r_a-r_b}(r_a^4-r_b^4)$

$=r_a^3+r_a^2r_b+r_ar_b^2+r_b^3$

$=(r_a+r_b)^3-2r_ar_b(r_a+r_b)$

$=3^3-2\cdot1\cdot3=\underline{21}$ //

(3)

$\frac{c_{16}}{c_8}$

$=\frac{r_a^{16}-r_b^{16}}{r_a^8-r_b^8}$

$=r_a^8+r_b^8$

$=(r_a^4+r_b^4)^2-2r_a^4r_b^4$

$=\{(\underbrace{r_a^2+r_b^2}_{(r_a+r_b)^2-2})^2-2\}^2-2$

$=(7^2-2)^2-2$

$=47^2-2=\underline{2207}$ //

[IV]

(1) P(5回目でA優勝)

$=P(A\to C\to B\to A\to A)$ $\boxed{\text{勝つ } 4-4}$

$=\frac{1}{2^5}=\underline{\frac{1}{32}}$ //

P(6回目でC優勝)

$=P(A\to C\to B\to A\to C\to C)$

$+P(B\to C\to A\to B\to C\to C)$

$=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}=\underline{\frac{1}{32}}$ //

(2)

P(6回以下でB優勝)

$=P(2回)+P(4回)+P(5回)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\underline{\frac{11}{32}}$ //

P(6回以下でC優勝)

$=P(3回)+P(6回)$

$=P(A\to C\to C)\times 2$

$+P(A\to C\to B\to A\to C\to C)\times 2$

$=\frac{1}{2^3}2+\frac{1}{2^6}2=\underline{\frac{9}{32}}$ //

(3) P(Aが最初に勝ち、3n回以下で優勝)

$=P(2回)+P(5回)+P(8回)$

$+\cdots+P(3n-1回)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2$

$+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}$

$=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}$