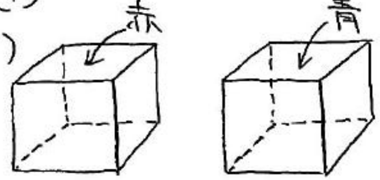
2016 順天堂医

$\boxed{1}$

(1)

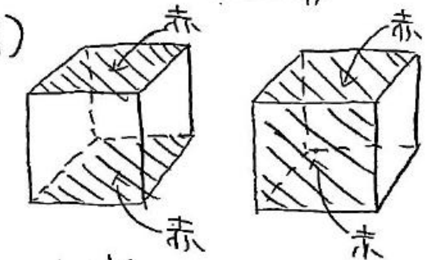
(ア)



残り青　　残り赤、

ア… $\underline{2通り}$ //

(イ)

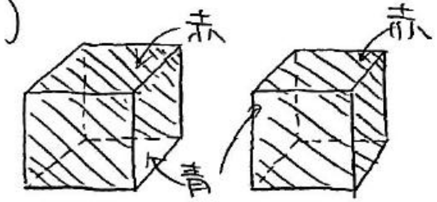


上と底赤、　　上と手前赤、

これが青のときもあるので

イ… $2\times2=\underline{4通り}$ //

(ウ)

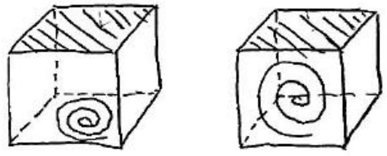


コの字型　　上手前、右型

ウ… $\underline{2通り}$ //

(エ) 計 $\underline{8通り}$ //

(オ)

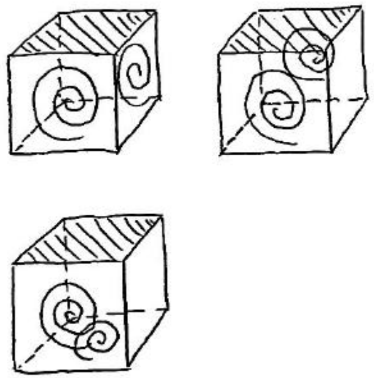


4面に使う色が3とおり

配色は上の2とおりより

オ… $3\times2=\underline{6通り}$ //

(カキ)



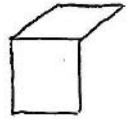
配色は上の3とおり

どの色を1面-2面-3面に使うかが3!とおりより

カキ… $3\times3!=\underline{18通り}$ //

(ク)

(i)



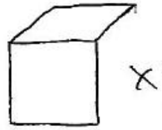
$\times3$

例えば赤が上のときを固定すると

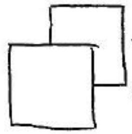
右に青か黄かで

2とおり

(ii)



$\times2$,

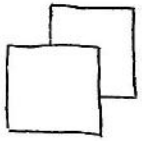


$\times1$

向かいあわせに使う色の決め方は3とおり，側面の決め方が1とおり．

$3\times1=3$とおり

(iii)



$\times3$

これは1とおり

$\therefore\ 2+3+1=\underline{6通り}$ //

(ケコ)

$6+18+6=\underline{30通り}$ //

(2)

アイ… $\underline{\frac{1}{5}l}$ //

ウエ… $\underline{\frac{2}{5}\pi}$ //

半径r，中心角θの弧の長さは

$2r\pi\times\frac{\theta}{2\pi}$

$=r\theta$

オカ… $\frac{1}{5}l\times\frac{2}{5}\pi$

$+\frac{2}{5}l\times\frac{2}{5}\pi$

$+\frac{3}{5}l\times\frac{2}{5}\pi$

$+\frac{4}{5}l\times\frac{2}{5}\pi$

$+l\times\frac{2}{5}\pi$

$=\left(\frac{1}{5}l+l\right)\times5\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\pi$

$=\underline{\frac{6}{5}l\pi}$ //

キクケコ

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}l\right)^2\frac{2}{5}\pi$

$+\cdots$

$+\frac{1}{2}l^2\frac{2}{5}\pi$

$=\frac{l^2\pi}{125}(1^2+2^2+\cdots+5^2)$

$=\frac{\pi l^2}{125}\cdot\frac{1}{6}5\cdot6\cdot11$

$=\underline{\frac{11}{25}l^2\pi}$ //

半径r，中心角θの弧の長さは

$r^2\pi\times\frac{\theta}{2\pi}$

$=\frac{r^2\theta}{2}$

正n角形の糸の端の移動距離 $=L_n$

$=\frac{1}{n}l\times\frac{2}{n}\pi$

$+\cdots$

$+\frac{n}{n}l\times\frac{2}{n}\pi$

$=\left(\frac{1}{n}l+\frac{n}{n}l\right)\times n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\pi$

$=\frac{1}{n}(1\cdot n+1)l\pi$

糸の掃く面積 $=S_n$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}l\right)^2\frac{2}{n}\pi$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}l\right)^2\frac{2}{n}\pi$

$=\frac{l^2\pi}{n^3}(1^2+\cdots+n^2)$

$=\frac{l^2\pi}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\right)l^2\pi$

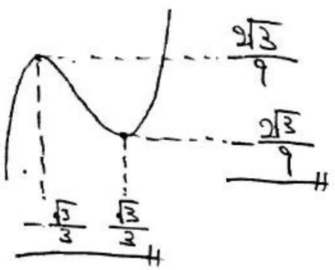
$\lim_{n\to\infty}L_n=1\cdot l\pi$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}l^2\pi$

(3)

$f(x)=x^3-x$

$f'(x)=3x^2-1$



$x^3-x=t$

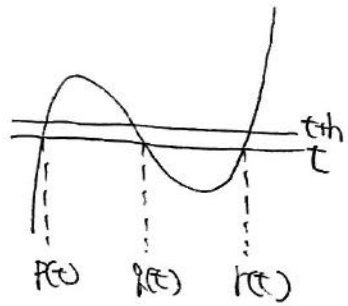
$\Leftrightarrow x^3-x-t=0$

KKK

$P(t)+q(t)+r(t)=0$

$P(t)q(t)+q(t)r(t)+r(t)P(t)$

$=-1$



$G(t+h)-G(t)$

$\fallingdotseq h(r(t)-q(t))-h(q(t)-p(t))$

$G'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}$

$=P(t)+r(t)-2q(t)$

$=-q(t)-2q(t)$

$=-3q(t)$

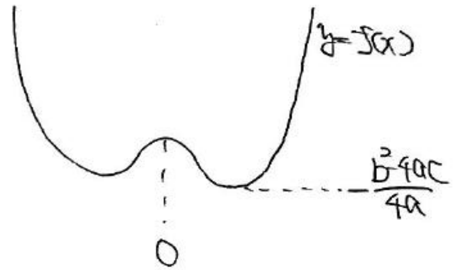
$G'(t)=1\Leftrightarrow q(t)=-\frac{1}{3}$

$\therefore t=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}$

(4)

$f(x)=a\left(x^4+\frac{b}{a}x^2\right)+c$

$=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$



こういう図になっていることを読みとる。

$f(0)=c=\frac{3}{2}$

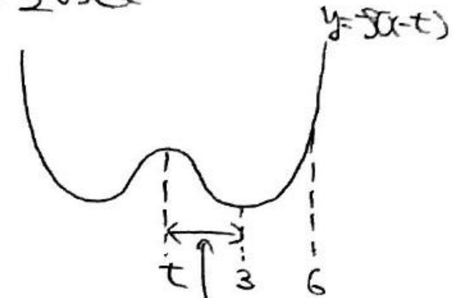
$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{b^2-6a}{4a}=-\frac{57}{16}$

$\Leftrightarrow 16b^2-96a=228a$

$\Leftrightarrow 4b^2=57a+24a$

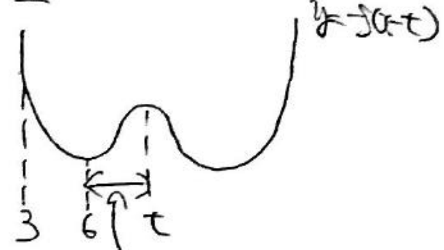
$=81a\cdots①$

$t=\frac{3}{2}$のとき



差が$\frac{3}{2}$

$t=\frac{15}{2}$のとき



差が$\frac{3}{2}$

これより頂点のx座標が$\left(\frac{3}{2}\right)^2$より

$\frac{b}{2a}=-\frac{9}{4}$

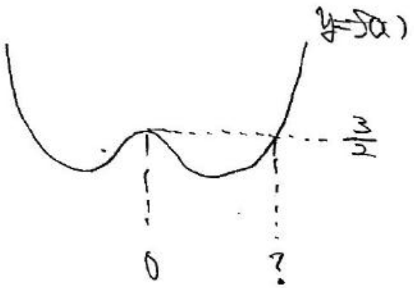
$\Leftrightarrow b=-\frac{9}{2}a\cdots②$

①、②より

$a=1,\ b=-\frac{9}{2}$

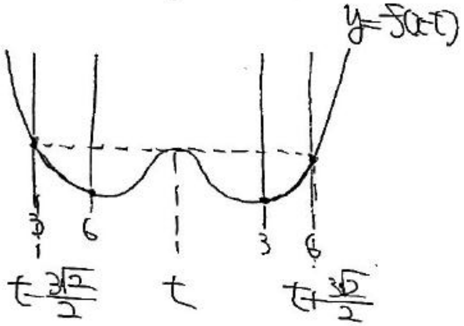
$f(x)=x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}$

$=\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{57}{16}$



$f(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^4-\frac{9}{2}x^2=0$

$? = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

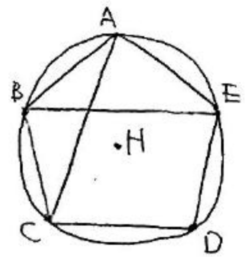


$t+\frac{3\sqrt{2}}{2}<6$ または $t-\frac{3\sqrt{2}}{2}>3$

で最大値が $\frac{3}{2}$ より大きくなる.

$\therefore \alpha=6-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \beta=3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{2}$



△BCAは鋭角黄金三角形なので

$AC=\frac{1+\sqrt{5}}{2}AB$

$\cos\angle BAC=\frac{\frac{a}{2}}{1}$

$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

△ABHに余

$AB^2=AH^2+AH^2-2AH^2\cos 72^\circ$

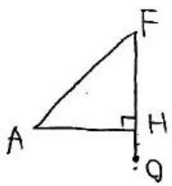
$=2AH^2(1-2\cos^2 36^\circ+1)$

$=2AH^2\left(2-\frac{6+2\sqrt{5}}{8}\right)$

$=2AH^2\frac{5-\sqrt{5}}{4}$

$=\frac{10-2\sqrt{5}}{4}AH^2$

$\therefore AB=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}AH$



$FH^2=\underbrace{FA^2}_{AB^2}-AH^2$

$=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}AH^2$

$FH=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}AH$

$\underbrace{OA^2}_{FO^2}=AH^2+HO^2$

$(FH+HO)^2=AH^2+HO^2$

$FH^2+2FH\cdot HO=AH^2$

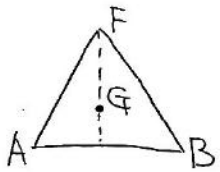
$\therefore HO=\frac{AH^2-FH^2}{2FH}$

$=\frac{\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}AH^2}{(\sqrt{5}-1)AH}$

$=\frac{1}{2}AH$

$FO=FH+HO$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}AH$

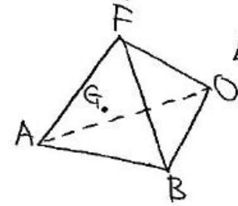


AB=1とすると

$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}AH$

$=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{6}AH$



← 正三角錐

GO

$=\sqrt{FO^2-FG^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{4}AH^2-\frac{1}{3}AB^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{3}}AB$

$=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}AB$

(正二十面体の表面積)

$=20\triangle FAB$

$=20\cdot\frac{1}{2}AB^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}AB^2$

(体積)

$=\frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{3}AB^2\cdot\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}AB$

$=\frac{15+5\sqrt{5}}{12}AB^3$

3

(1)

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$

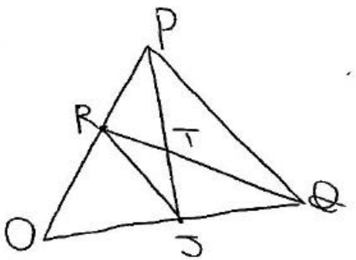
$=x^2+2|x||y|+y^2-(x+y)^2$

$=2(|xy|-xy)\geqq 0$

$\therefore |x+y|^2\leqq(|x|+|y|)^2$

$\therefore |x+y|\leqq|x|+|y|$

(2)



$PQ+QR-PQ-RS$

$\geqq PT+TS+QT+TR-PT-TQ-RT-TS$

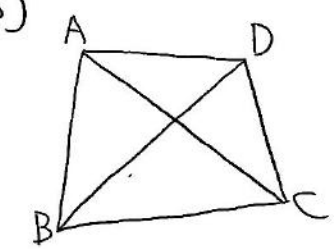
三角不等式

$\left(\begin{array}{l}\because PQ\leqq PT+TQ \Leftrightarrow -PQ\geqq -PT-TQ \\ RS\leqq RT+TS \Leftrightarrow -RS\geqq -RT-TS\end{array}\right)$

$=0$

$\therefore PQ+RS\leqq PS+QR$

(3)



ABに関して三角不等式

$AB\leqq BD+AD$

$AB\leqq BC+AC$

CDに関しても同様に

$CD\leqq AC+AD$

$CD\leqq BC+BD$

辺々すべて足すと

$2(AB+CD)\leqq 2(AC+BD+AD+BC)$

$\therefore AB+CD\leqq AC+BD+AD+BC$

(4) 等号が成立つとき

C, Dが線分AB上かつA, Bが

線分CD上

つまり線分ABと線分CDが一致.

∴「A=CかつB=D」

または

「A=DかつB=C」