2015 帝京(医)

[1]

(1) $y=x^3-3x^2+2x$

$y'=3x^2-6x+2$

$x=t$での接線は

$y=(3t^2-6t+2)(x-t)+t^3-3t^2+2t$

$=(3t^2-6t+2)x-2t^3+3t^2$

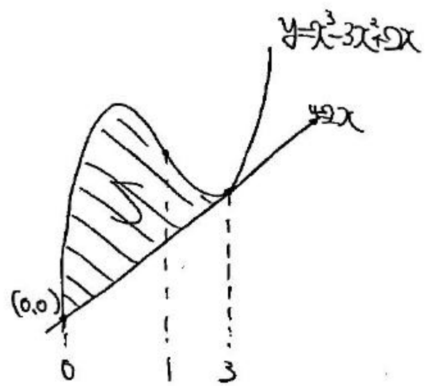
↓ 原点通る

$0=-2t^3+3t^2$

$\therefore t=0,\frac{3}{2}$

$t=\frac{3}{2}$のとき　$y=-\frac{1}{4}x$ //

$t=0$のとき　$y=2x$ //



$S=\frac{1}{12}(3-0)^4=\frac{27}{4}$ //

(2) $\log_2 M,\ \log_8 M,\ \log_b M\cdots$等差

↓

$\log_2 M+\log_b M=2\log_8 M$

$\Leftrightarrow \log_2 M+\frac{\log_2 M}{\log_2 b}=2\frac{\log_2 M}{\log_2 8}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\log_2 b}=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \log_2 b=-3$

$\therefore b=2^{-3}=\frac{1}{8}$ //

$\log_2 M,\ \log_8 M,\ \log_b M\cdots$等比

↓

$(\log_2 M)(\log_b M)=(\log_8 M)^2$

$\Leftrightarrow (\log_2 M)\left(\frac{\log_2 M}{\log_2 b}\right)=\left(\frac{\log_2 M}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 b}=\frac{1}{9}$

$\therefore b=2^9=512$ //

(3)

$p=\frac{1}{6^6}\,{}_6C_1\cdot{}_5C_3\cdot\frac{6!}{3!1!1!1!}$

$=\frac{1}{6^6}\cdot 60\cdot 120$

$q=\frac{1}{6^6}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{6!}{3!2!}$

$=\frac{1}{6^6}\cdot 120\cdot 60$

$r=\frac{1}{6^6}\,{}_6C_3\cdot\frac{6!}{2!2!2!}$

$=\frac{1}{6^6}\cdot 20\cdot 90$

$s=\frac{1}{6^6}\cdot{}_6C_2\cdot\frac{6!}{3!3!}$

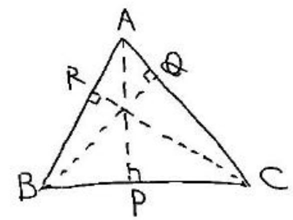
$=\frac{1}{6^6}\cdot 15\cdot 20$

以上より

$\frac{p}{q}=1,\ \frac{p}{r}=4,\ \frac{r}{s}=6$ //

[2]

(1)



$a\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}=b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=c\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=S$

$\therefore \begin{cases} a=2xS \\ b=4S \\ c=6S \end{cases}$

余

$\cos A=\frac{16S^2+36S^2-4x^2S^2}{2\cdot 4S\cdot 6S}$

$=\frac{13-x^2}{12}$ //

(2)

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

故 $S^2=\frac{1}{4}\cdot 24^2S^4\left(1-\frac{(13-x^2)^2}{144}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{S^2}=6\cdot 24\left\{1-\frac{x^4-26x^2+169}{144}\right\}$

$=-25-x^4+26x^2$

$=(25-x^2)(x^2-1)$ //

(3)

$\frac{1}{S^2}=-(x^2-13)^2+144$

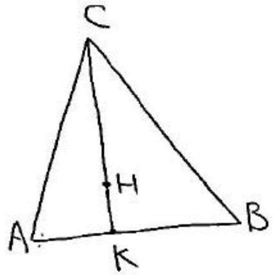
$x=\sqrt{13}$のとき

$\min S=\frac{1}{12}$ //

このとき

$BC=a=2\sqrt{13}\cdot\frac{1}{12}=\frac{\sqrt{13}}{6}$ //

[3]



平面ABC: $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$

$\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$

法線ベクトル $\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ より

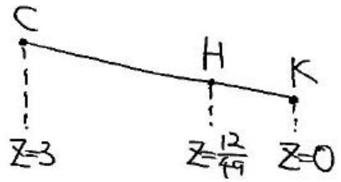
直線OH: $\begin{cases}x=6t\\y=3t\\z=2t\end{cases}$.

平面ABCと連立

$36t+9t+4t-6=0$

$\therefore t=\frac{6}{49}$

$H\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$



$\therefore CH:CK = 3-\frac{12}{49} : 3$

$= 45:49$

$\therefore \overrightarrow{CK} = \frac{49}{45}\overrightarrow{CH}$ //

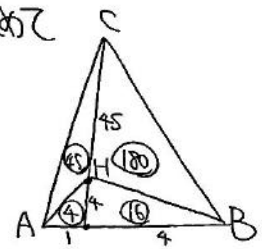
$\overrightarrow{OK}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}$

$= \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{49}{45}\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}$

$= \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ //

改めて



$V_1 : V_2 : V_3$

$= \triangle HAB : \triangle HBC : \triangle HCA$

$= 20 : 180 : 45$

$= 4 : 36 : 9$ //

[4]

(1) $x \leqq y \leqq z$ として考える.

$z(1-xy) = -x-y-8$

$\Leftrightarrow z = \frac{x+y+8}{xy-1}$

また

$xyz = x+y+z+8 \leqq 3z+8$

$\Leftrightarrow z(xy-3) \leqq 8 \cdots ①$

①をみたすのは

$\underset{②}{xy \leqq 3}$ または $\underset{③}{\begin{cases}xy>3\\z \leqq \frac{8}{xy-3}\end{cases}}$

②であるのは

$(x,y)=(1,2),(1,3)$

③であるのは

$y \leqq z \leqq \frac{8}{xy-3}$

$\therefore y(xy-3) \leqq 8$

$(x,y)=(1,4),(2,2)$

以上より

$(x,y,z)=(1,2,11),(1,3,6),$
$(1,4,\frac{13}{3}),(2,2,4)$

↑
NG

$\min xyz = 2\cdot 2\cdot 4=16$

$\max xyz = 1\cdot 2\cdot 11 = 22$

$xyz=22$ のとき x,y,z で

最も大きいのは 11 //

(2)

全部で $3!+3!+\frac{3!}{2!} = 15$ 組 //

[5]

(1)(2)

$S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

$-)\ \frac{1}{2}S_n = \qquad \frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$S_n = 1+4\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$= 1+8\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{4n-2}{2^{n+1}}$

$= 3-\frac{4n-6}{2^{n+1}}$

$= 3-\frac{2n+3}{2^n}$

$S_4 = 3-\frac{11}{2^4} = \frac{37}{16}$ //

$S_{10} = 3-\frac{33}{2^{10}} = \frac{3049}{1024}$ //

また

$S_n<3$, $\lim_{n\to\infty} S_n = 3$

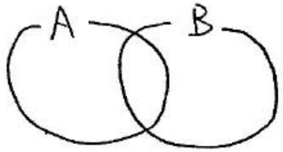
(最小の正の整数 N) $=3$

(3) $3-S_n = \frac{2n+3}{2^n} < \frac{1}{100}$

調べると $\min n = 12$ //

[6]

(1)



$\{P(\overline{A \cup B})\}^2 \leqq P(\overline{A} \cap B)$

$\Leftrightarrow \{1-(\frac{1}{3}-x)\}^2 \leqq \frac{1}{2}-x$

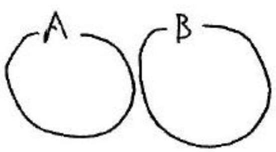
$\Leftrightarrow x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9} \leqq \frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{7}{3}x-\frac{1}{18} \leqq 0$

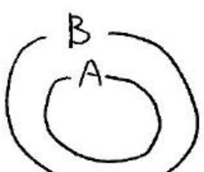
$\Leftrightarrow 18x^2+42x-1 \leqq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-7-\sqrt{51}}{6} \leqq x \leqq \frac{-7+\sqrt{51}}{6}$ …①

また



のとき $x=0$



のとき $x=\frac{1}{3}$

より $0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}$ …②

①,②より

$0 \leqq x \leqq \frac{-7+\sqrt{51}}{6}$ //

(2)

P_5 当たり2回 3回目

$= P(????当)$

$= {}_4C_2 \left(\frac{10}{12}\right)^2 \left(\frac{2}{12}\right)^3$

$= 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3$

$= \frac{25}{6^4}$

$= \frac{25}{1296}$ //

(ii)

P_n 当たり2回 3回目

$= P(?\cdots?当)$

$= {}_{n-1}C_2 \left(\frac{10}{12}\right)^{n-3} \left(\frac{2}{12}\right)^3$

$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^n}$

$\frac{P_{n+1}}{P_n}$

$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{5^{n-2}}{6^{n+1}} \cdot \frac{2}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{6^n}{5^{n-3}}$

$= \frac{n}{n-2} \cdot \frac{5}{6}$

(i) $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Leftrightarrow 5n > 6(n-2)$

$\Leftrightarrow n < 12$ のとき

$P_n < P_{n+1}$

(ii) $n=12$ のとき

$P_n = P_{n+1}$

(iii) $n>12$ のとき

$P_n > P_{n+1}$

以上より

$P_3 < P_4 < \cdots < P_{11} < P_{12} = P_{13} > P_{14} > \cdots$

$n=12$ // または 13 // のとき

P_nは最大.