2015 杏林医

I

(a)

和は9が最も出やすい.

$P(\text{和が}9)$

$=\dfrac{n((1,8),(2,7),\cdots,(4,5))}{{}_8C_2}$

$=\dfrac{4}{28}=\underline{\dfrac{1}{7}}$ //

$P(x_1^2-x_2^2=5m)$

$=P((x_1+x_2)(x_1-x_2)=5m)$

$=P(\text{和が}5\text{の倍数または差が}5\text{の倍数})$

(1,4), (2,3), (2,8), (3,7), (4,6), (7,8), (1,6), (2,7), (3,8) の9とおり

$=\underline{\dfrac{9}{28}}$ //

(b)

P_1

$=P(1\text{回で和が}4\text{の倍数})$

(1,3), (1,7), (2,6), (3,5), (4,8), (5,7).

$=\dfrac{6}{28}=\underline{\dfrac{3}{14}}$ //

P_2

$=P(2\text{回で和が}4\text{の倍数になるのが}1\text{回そうでないのが}1\text{回})$

$={}_2C_1\cdot P_1(1-P_1)$

$=2\cdot\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{11}{14}=\underline{\dfrac{33}{98}}$ //

$$\begin{array}{lll} & n & n+1 \\ \text{奇数回} & P_n \xrightarrow{\frac{11}{14}} & P_{n+1} \\ \text{偶数回} & 1-P_n \nearrow_{\frac{3}{14}} & \end{array}$$

図より

$P_{n+1}=\dfrac{11}{14}P_n+\dfrac{3}{14}(1-P_n)$

$=\underline{\dfrac{4}{7}P_n+\dfrac{3}{14}}$ //

特性方程式

$\alpha=\dfrac{4}{7}\alpha+\dfrac{3}{14}$

$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

より

$P_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{7}\left(P_n-\dfrac{1}{2}\right)$

解くと $P_n=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}P_n=\dfrac{1}{2}}$ //

II.

(a)

$\underline{y=k(x-1)+2}$ //

$F: 3x^2+2y^2=6$

$\Leftrightarrow 3x^2+2(kx+2-k)^2=6$

$\Leftrightarrow 3x^2+2k^2x^2+4(2-k)kx+2(2-k)^2=6$

$\Leftrightarrow (3+2k^2)x^2+4(2-k)kx+2k^2-8k+2=0$

$\dfrac{D}{4}$

$=4k^2(2-k)^2-(3+2k^2)(2k^2-8k+2)=0$

$\Leftrightarrow$

$2(k^4-4k^3+4k^2)-(3+2k^2)(k^2-4k+1)=0$

$\Leftrightarrow$

$2k^4-8k^3+8k^2-(3k^2-12k+3+2k^4-8k^3+2k^2)=0$

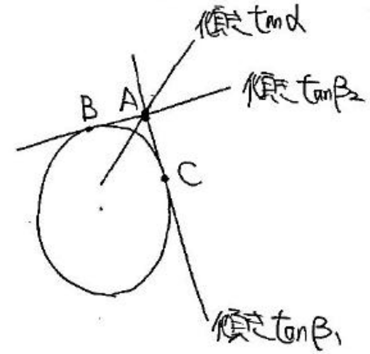
$\Leftrightarrow 3k^2+12k-3=0$

$\Leftrightarrow k^2+4k-1=0$

2本の接線の傾きの積が

$k_1k_2=-1$

よりなす角は $\underline{\dfrac{1}{2}\pi}$ //



$\alpha=\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

より

$\tan 2\alpha=\tan(\beta_1+\beta_2)$

$=\dfrac{\tan\beta_1+\tan\beta_2}{1-\tan\beta_1\tan\beta_2}$

$=\dfrac{-4}{1-(-1)}=\underline{-2}$ //

(b) 明らかに捨て問.

$P(a,b)$ を通り傾きが k な直線は

$y=k(x-a)+b$

楕円に代入.

$3x^2+2(kx+b-ak)^2=6$

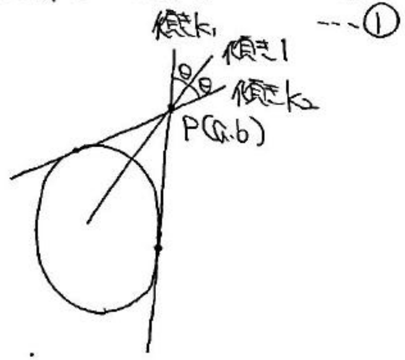
$\Leftrightarrow (3+2k^2)x^2+4(b-ak)kx+2(b-ak)^2-6=0$

$\dfrac{D}{4}$

$=4k^2(b-ak)^2-(3+2k^2)\{2(b-ak)^2-6\}$

$= 0$

$\Leftrightarrow (2-a^2)k^2+2abk+3-b^2=0$ …①



$k_1 = \tan(45^\circ+\theta)$

$= \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ …②

$k_2 = \tan(45^\circ-\theta)$

$= \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ …③

①と②,③より

$k_1k_2 = \dfrac{3-b^2}{2-a^2} = 1 \quad (a \neq \pm\sqrt{2})$

$\therefore -a^2+b^2 = 1 \quad (a \neq \pm\sqrt{2})$

$a=\pm\sqrt{2}$のとき $b=\pm\sqrt{3}$ となので上の式を満たす．ようするにPは $\underline{-x^2+y^2=1}$ で表される

$\underline{④}$ 双曲線上．

III.

(a) 真数は正なので最初にy軸に関しての対称移動ができないことに注意(原点に関しても)．

$y=\log_2 x$

x軸対称 → $-y=\log_2 x$ → 逆関数 → $y=2^{-x}$ ($\underline{①}$)

逆関数 → $y=2^x$ → y軸対称 → $y=2^{-x}$ ($\underline{⑤}$)

$y=2^{-x}$ → x軸方向に$\frac{1}{2}$倍 → $y=2^{-2x}$ ($\underline{④}$)

(b).

$g(x)$

$= -\log_4 (a-x)(x-2a+6)$

真数条件

$\begin{cases} a-x>0 \\ x-2a+6>0 \end{cases}$ …☆

$y=f(g(x))$

$=4^{-g(x)}$

$=(a-x)(x-2a+6)$

$=-2a^2+(x+6)a+2xa-x(x+6)$

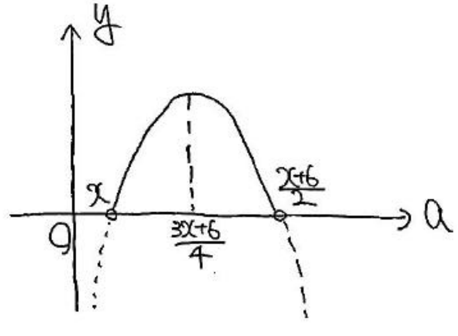
$=-2a^2+(3x+6)a-x^2-6x$

$=-2\left(a-\dfrac{3x+6}{4}\right)^2+\dfrac{(3x+6)^2}{8}-x^2-6x$

$=-2\left(a-\dfrac{3x+6}{4}\right)^2+\dfrac{x^2-12x+36}{8}$

$\left(x<a<\dfrac{x+6}{2} \quad \because ☆\right)$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{なぜ}x<\frac{x+6}{2}\text{か} \\ ☆\text{より } x<a<6 \\ \Leftrightarrow 2x-x<6 \\ \therefore x<\frac{x+6}{2} \end{array}}$

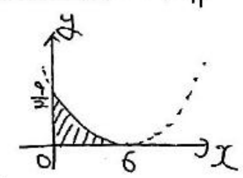


$a=\dfrac{3x+6}{4}$ のとき yの最大値は

$\underline{\dfrac{x^2-12x+36}{8}=\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}}$

となる．

(Dの面積)



$=\int_0^6 \frac{1}{8}(x-6)^2dx$

$=\left[\frac{1}{24}(x-6)^3\right]_0^6$

$=\dfrac{6^3}{24}=\underline{9}$

(c) これも捨て問

$\log_4\dfrac{1}{a-x}-\log_4(x-2a+6)=\log_4\dfrac{5-x}{2}$ …①

真数条件

$a-x>0,\ x-2a+6>0,\ 5-x>0$

$\Leftrightarrow x<a,\ 2a-6<x,\ x<5$

($2a-6<a$より)

$2a-6<x<a$ かつ $0<x<5$

①を変形すると

$2(a-x)(x-2a+6)=5-x$ …②

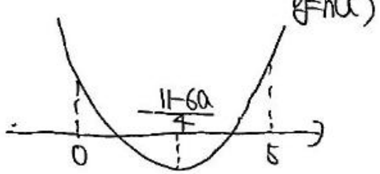
ここでこの式より $0<x<5$ ならば $2a-6<x<a$ を満たすので

真数条件は $0<x<5$.

②を変形して

$2x^2+(11-6a)x+4a^2-12a+5=0$

が $0<x<5$ で異なる2つの解をもつ条件を求める．左辺を $h(x)$ とおくと



$$\begin{cases} \text{端}\ h(0)=4a^2-12a+5>0 \\ \quad h(5)=4a^2-42a+110>0 \\ \text{軸}\ 0<\frac{6a-11}{4}<5 \\ \text{判}\ (11-6a)^2-8(4a^2-12a+5)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}<a \\ a<5,\ \frac{11}{2}<a \\ \frac{11}{6}<a<\frac{31}{6} \\ a \neq \frac{9}{2} \end{cases}$$

共通範囲より

$\frac{5}{2}<a<\frac{9}{2},\ \frac{9}{2}<a<5$ //

IV

(a) 微分した式は

$e^{-3x}\sin 4x$

$=-3e^{-3x}(A\sin 4x+B\cos 4x)$

$+e^{-3x}(4A\cos 4x-4B\sin 4x)$

$=e^{-3x}\{\underbrace{(-3A-4B)}_{1}\sin 4x$

$\quad +\underbrace{(4A-3B)}_{0}\cos 4x\}$

解くと

$A=\frac{-3}{25},\ B=\frac{-4}{25}$ //

$x=0$ を代入すると

$0=B+C \quad \therefore C=\frac{4}{25}$ //

したがって

$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt=C=\frac{4}{25}$ //

I_1

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3t}\sin 4t\,dt$

$=e^{-\frac{3}{4}\pi}(A\sin\pi+B\cos\pi)+C$

$=\frac{4}{25}e^{-\frac{3}{4}\pi}+\frac{4}{25}$

I_2

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-3t}\sin 4t)dt$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3t}\sin 4t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-3t}\sin 4t\,dt$

$=-Be^{-\frac{3}{2}\pi}-Be^{-\frac{3}{4}\pi}$

$=\frac{4}{25}e^{-\frac{3}{4}\pi}(1+e^{-\frac{3}{4}\pi})$

$\therefore \frac{I_2}{I_1}=e^{-\frac{3}{4}\pi}=e^{\alpha}$

$\therefore \alpha=\frac{-3}{4}\pi$ //

$\sum_{n=1}^{\infty} I_n=\frac{\frac{4}{25}(1+e^{\alpha})}{1-e^{\alpha}}$

$=C\times\frac{1+e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}}$ ⋯⑨ //