2014 埼玉医科大（後期）

$\boxed{1}$

問1

C_1上の(t, t^2)での接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2$$
$$=2tx-t^2$$

これとC_2を連立.

$$x^2-4ax+4a=2tx-t^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-(4a+2t)x+4a+t^2=0 \cdots ①$$

$$\frac{D}{4}=(2a+t)^2-(4a+t^2)$$
$$=4a^2-4a+4at=0$$
$$\Leftrightarrow a-1+t=0$$
$$\Leftrightarrow t=1-a$$

接線

$$\underline{y=(2-2a)x-(1-a)^2}$$

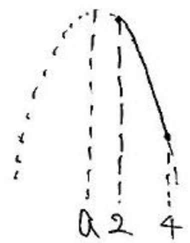
①は

$$x^2-(2+2a)x+(1+a)^2=0$$
$$\therefore x=1+a$$
$$\underline{=1+1\cdot a}$$

問2.

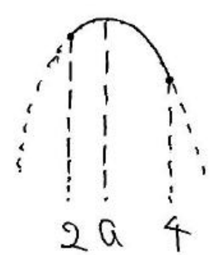
$$f(x)=-x^2+2ax-a$$
$$=-(x-a)^2+a^2-a$$

(i) $a<2$のとき



$$\begin{cases} f(2)=3a-4<6 \\ f(4)=7a-16>0 \end{cases}$$
$$\therefore \frac{16}{7}<a<\frac{10}{3} \cdots \text{NG}$$
$(\because a<2)$

(ii) $2\leqq a<3$のとき

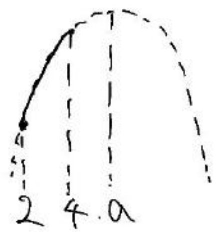


$$\begin{cases} f(a)=a^2-a<6 \Leftrightarrow -2<a<3 \\ f(4)=7a-16>0 \end{cases}$$
$$\therefore \frac{16}{7}<a<3$$

(iii) $3\leqq a<4$のとき

$f(a)=a^2-a<6$
を満たさないのでNG.

(iv) $a\geqq 4$のとき

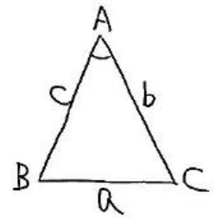


$f(4)=7a-16<6$
を満たさないのでNG.

以上より

$$\underline{\frac{16}{7}<a<3}$$

問3.



余

$$c+b=\sqrt{13}a$$
$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{13}}=a$$

$$\cos\angle BAC$$
$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{b^2+c^2-\frac{b^2+2bc+c^2}{13}}{2bc}$$
$$=\frac{12b^2+12c^2-2bc}{26bc}$$
$$=\frac{6}{13}\cdot\frac{b^2+c^2}{bc}-\frac{1}{13}$$
$$\geqq\frac{6}{13}\cdot\frac{2\sqrt{b^2c^2}}{bc}-\frac{1}{13}$$
（∵相加平均≧相乗平均）
$$\underline{=\frac{11}{13}}$$

等号成立は$b=c$.

問4.

$$\log_a 4x \leqq \frac{\log_a(3-x)}{\log_a\sqrt{a}}$$
$$\Leftrightarrow \log_a 4x \leqq 2\log_a(3-x)$$
$$\Leftrightarrow \log_a 4x \leqq \log_a(3-x)^2$$

真数条件

$$0<x<3$$

(i) $0<a<1$のとき

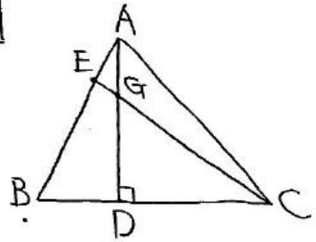
$$4x\geqq(3-x)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-10x+9\leqq 0$$
$$\therefore \underline{1\leqq x<3}$$ （∵真数条件）

(ii) $1<a$ のとき

$4x \leqq (3-x)^2$

$\therefore \underline{0<x\leqq 1}$ (∵真数条件) //

$\boxed{2}$



問1.

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}$

$=s\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}+(1-s)\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2-s\\-1-2s\\-1+2s\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=2-s-2-4s+2-4s$

$=2-9s=0$

$\therefore \underline{s=\frac{2}{9}}$ //

問2

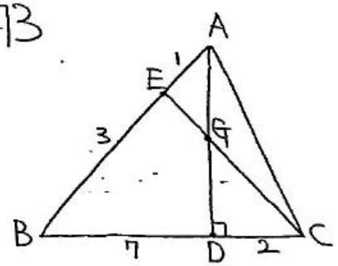
$\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{11\cdot 6-4^2}$

$=\frac{\sqrt{50}}{2}=\underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$ //

問3



メネラウスの定理

$\frac{9}{2}\cdot\frac{DG}{GA}\cdot\frac{1}{3}=1$

$\therefore DG:GA=2:3$

$\therefore \underline{a=\frac{3}{5}}$ //

$\frac{4}{1}\cdot\frac{EG}{GC}\cdot\frac{2}{7}=1$

$\therefore EG:GC=7:8$

$\therefore \underline{b=\frac{8}{15}}$ //

$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\-\frac{13}{9}\\-\frac{5}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{15}\\-\frac{13}{15}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}$ より

$\underline{G\left(\frac{46}{15},\frac{32}{15},\frac{2}{3}\right)}$ //

$\boxed{3}$

$f_{n+1}(x)$

$=(3x^2+2a_nx+b_n)e^x$

$+(x^3+a_nx^2+b_nx+c_n)e^x$

$=\{x^3+(a_n+3)x^2+(2a_n+b_n)x$

$+b_n+c_n\}e^x$

より

$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+3 & a_1=-10\\ b_{n+1}=2a_n+b_n\\ c_{n+1}=b_n+c_n\end{cases}$

$\downarrow$

$a_n=\underline{3n-13}$ //

$b_{n+1}=b_n+6n-26$ より

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-26)$

$=30+3(n-1)n-26(n-1)$

$=\underline{3n^2-29n+56}$ //

c_n

$=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-29k+56)$

$=5+\frac{1}{2}(n-1)n(2n-1)$

$-\frac{29}{2}(n-1)n+56(n-1)$

$=5+\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n)$

$-\frac{29}{2}(n^2-n)+56n-56$

$=\underline{1\cdot n^3-16n^2+71n-51}$ //

$\boxed{4}$

問1.

5人の並べ方…$5!$

帽子のかぶり方…2^5

より

$5! \times 2^5$

$= 120 \times 32 = \underline{3840}$

問2.

両端が男子になる5人の並べ方は

$_3P_2 \times 3!$.

帽子のかぶり方は両端の男子に関しては $2^2 - 1$. 残りの3人は 2^3 より

3×2^3.

よって

$_3P_2 \times 3! \times 3 \times 2^3$

$= \underline{864}$

問3

男子2人が連続で並ぶのは、

BBの選び方は $_3P_2$ 通り.

BBとBを下のVに入れればよい.

B　　BB　← $_3P_2$

V G V G V　← $2!$.

帽子のかぶり方は並んだ男子2人に関しては2. 残りの3人は 2^3 より

2×2^3.

よって

$_3P_2 \times {}_3P_2 \times 2! \times 2 \times 2^3$

$= \underline{1152}$