2014 杏林(医)

Ⅰ.

(a) $48=2^4\cdot 3$

より

$f(48)=5\cdot 2=\underline{10}$

$f(n)=9$ である最小のnは

$n=2^2\cdot 3^2=\underline{36}$

であり, $f(n)=5$のとき

$n=a^4$

と表せるから $1\leqq a^4\leqq 100$ より

$a=2,3$ より nは$\underline{2コ}$. $f(n)=6$ のとき

$n=a^5$ または $n=ab^2$

より, $n=32,18,50,98,12,75,20,45,28,63,44,99,52,68,76,92$ の

計 $\underline{16コ}$

(b) ◦ $f(n)=13$のとき

$\min n=2^{12}>100$

◦ $f(n)=14$のとき

$\min n=2^6\cdot 3>100$

◦ $f(n)=15$のとき

$\min n=3^4\cdot 2^2>100$

$f(n)$がこれ以上のときも同様.

$\therefore \max f(n)=\underline{12}$

$f(f(n))=5$のとき

$f(n)=a^4>12$ より不適.

$f(f(n))=6$のとき

$f(n)=a^2b=12$

のとき $a=2,\ b=3$. このとき

$n=\alpha\beta\gamma^2$

より

$\min n=2^2\cdot 3\cdot 5=\underline{60}$

(c)

$f(n)=2 \Leftrightarrow n$が素数

より $A=B\cdots\underline{③}$

Ⅱ

(a)

$f(\theta)$

$=1-\cos 2\theta+2\sin 2\theta+2(1+\cos 2\theta)$

$=2\sin 2\theta+\cos 2\theta+3$

$=\sqrt{5}\left(\sin 2\theta\cdot\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos\alpha}+\cos 2\theta\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin\alpha}\right)+3$

$=\underline{\sqrt{5}}\sin(2\theta+\alpha)\underline{+3}$

$\tan\alpha=\underline{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2}+4\tan\frac{\alpha}{2}-1=0$

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}=\underline{\sqrt{5}-2}$

また $2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$

つまり

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1-(\sqrt{5}-2)}{1+1\cdot(\sqrt{5}-2)}$

$=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{4}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ のとき

最大値 $\underline{\sqrt{5}+3}$.

(b)

$\frac{\pi}{3}+\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\frac{4}{3}\pi+\alpha$

より $\theta=\frac{2}{3}\pi$のとき

最小値 $-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+3$

$=\underline{-\sqrt{3}+\frac{5}{2}}$

(c)

$x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$

$=(x\ y)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

対角化

$=(X\ Y)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$

$=\alpha X^2+\beta Y^2=k$

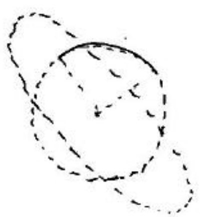
とできるので楕円$\underline{③}$である.

(α,βは$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$の固有方程式の解

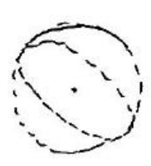
$x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta$ を
楕円に代入すると

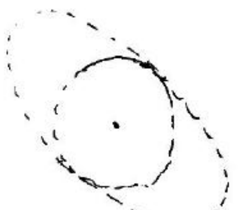
$4\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta=k$

$\Leftrightarrow \underset{動く}{f(\theta)}=k \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(\theta) \\ y=k \end{cases}$



楕円と円が接するには





この2パターンはなく、つまり
$f(\theta)$ が最大をとるときと最小をとるときに接する.
$-1\leqq x\leqq\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$
であることを考えると、$2\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$
を満たす θ は範囲外より
最小はとれない.

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ となる θ は範囲内
より最大はとれるので、求める k は

$k=\max f(\theta)$
$=\sqrt{5}+3$

そのときの接線の傾きは

$$-\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=-\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$ //

III

(a) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$

$s+t+u=1$ //

(b)

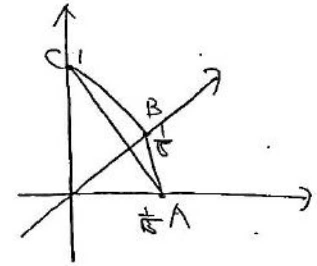
$OA=a,\ OB=b,\ OC=c$

とおくと

$\begin{cases} ab=k \\ bc=\sqrt{3}k \\ ca=\sqrt{5}k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

$\downarrow$

$a:b:c=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{5}}:1$



$OA=\frac{1}{\sqrt{3}},\ OB=\frac{1}{\sqrt{5}},\ OC=1$

とおく.

$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$

とおくと

$|\overrightarrow{OD}|^2=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\beta^2}{5}+\gamma^2$

$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{(\alpha-1)^2}{3}+\frac{\beta^2}{5}+\gamma^2$

$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{(\beta-1)^2}{5}+\gamma^2$

$|\overrightarrow{CD}|^2=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\beta^2}{5}+(\gamma-1)^2$

より

$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ // // //

$\overrightarrow{OG}=t\overrightarrow{OD}$ $(t\in\mathbb{R})$

$=\frac{t}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OC}$

$\downarrow$

$\frac{3}{2}t=1\quad \therefore t=\frac{2}{3}$

G は OP を 2:1 に内分.
G は △ABC の重心 …… ①

(c)

$\alpha:\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{5}}}+\frac{z}{1}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x+\sqrt{5}y+z-1=0$

直線OH: $\begin{cases} x=\sqrt{3}u \\ y=\sqrt{5}u \\ z=u \end{cases}$ $(u\in\mathbb{R})$

これと α を連立

$3u+5u+u-1=0$

$\therefore u=\frac{1}{9}$

$\therefore H\left(\frac{\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{5}}{9},\frac{1}{9}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{OC}$ // // //

$D\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{5}},\frac{1}{2}\right)$ を通り α に
垂直な直線DEは

$\begin{cases} x=\sqrt{3}l+\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{5}l+\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ z=l+\frac{1}{2} \end{cases}$

これと α を連立

$3l+\frac{1}{2}+5l+\frac{1}{2}+l+\frac{1}{2}-1=0$

$\therefore l=\frac{-\frac{1}{2}}{9}=-\frac{1}{18}$

$\therefore E\left(-\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{18}+\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{18}+\frac{1}{2}\right)$

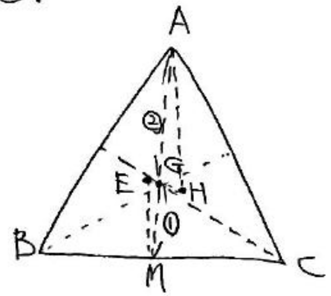
$\therefore \overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OE}$と$\overrightarrow{OH}$を比較．

$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

$=\frac{2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}}{1+2}$

とできるのでGはEHを$1:\underline{2}$に内分．



EはDOSQに下ろした垂線の足なのでAE=BE=CEである．

つまりEは外心．AG:GM=2:1．

EG:GH=1:2より，

△AGH∽△MGE．つまり

AH∥EMより AH⊥BC．選択肢の中から垂心が適当．

$\therefore$ Hは垂心…$\underline{④}$，Eは外心…$\underline{③}$

※直線EHのことをオイラー線といいます．

IV.

(a)

$\frac{d}{dx}f(x)=\underline{3}g(x)$

$\frac{d}{dx}g(x)=\underline{3}f(x)$

$h(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{0}{2}=\underline{0}$

$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-6x}}{1+e^{-6x}}=\underline{1}$

$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}+1}=\underline{-1}$

$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{3(f(x))^2-3(g(x))^2}{(f(x))^2}$

$=\frac{12}{(f(x))^2}$

(b)

$C: y=h'(a)(x-a)+h(a)$

$\downarrow$ (b, 1)通る

$1=h'(a)(b-a)+h(a)$

$\Leftrightarrow b-a=\frac{1-h(a)}{h'(a)}$

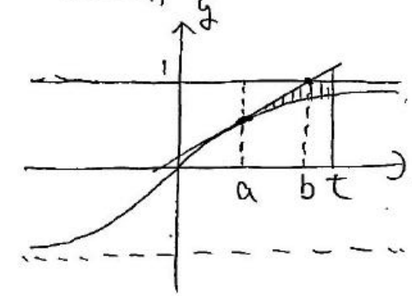
$=\left(1-\frac{g(a)}{f(a)}\right)\frac{(f(a))^2}{12}$

$=\frac{1}{12}f(a)(f(a)-g(a))$

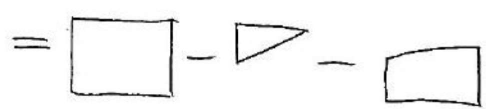
$=\frac{1}{12}\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)2e^{-3a}$

$=\frac{1}{12}\cdot 5\cdot e^{-\log 2}$

$=\underline{\frac{5}{24}}$



$S(t)$



$=t-a-(1-h(a))(b-a)\frac{1}{2}$
$-\int_a^t\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}dx$

$=t-a-\left(1-\frac{3}{5}\right)\frac{5}{48}$
$-\left[\frac{1}{3}\log(e^{3x}+e^{-3x})\right]_a^t$

$=t-\frac{1}{3}\log 2-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\log(e^{3t}+e^{-3t})$
$+\frac{1}{3}\log\left(2+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}\log\frac{e^{3t}}{e^{3t}+e^{-3t}}+\frac{1}{3}\log\frac{5}{4}-\frac{1}{24}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}S(t)$

$=\underline{\frac{-1}{24}}+\underline{\frac{1}{3}}\log_e\underline{\frac{5}{4}}$