2013 横浜市立大医

[I]

(1)

$(a+b+c)^3$

$=a^3+b^3+c^3+\frac{3!}{2!1!0!}(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+\frac{3!}{1!1!1!}abc$

$\therefore A^3$

$=C+3(AB-C)+6abc$

$\therefore abc=\frac{1}{6}(A^3+2C-3AB)$

(2)

(与式)

$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2n!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!(2k+2)}$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n+1)!}{(2k+2)!(2n-2k-1)!}\cdot\frac{1}{2n+1}$

$=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n+1}C_{2k+2}$

$=\frac{1}{2n+1}({}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n})$

ここで

$(1+1)^{2n+1}$

$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1}$

$(1-1)^{2n+1}$

$={}_{2n+1}C_0-{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots-{}_{2n+1}C_{2n+1}$

上の式を辺々たすと

$2^{2n+1}+0=2({}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n})$

$2^{2n}-\underbrace{{}_{2n+1}C_0}_{1}={}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$

より

$(与式)=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

(3) $P(X)=P(Y)=\frac{2}{5}$

$P(Z)=\frac{1}{5}$

P(X, Y, Zが少なくとも1回表示)

$=P(X\times3, Y\times1, Z\times1)$ 同じ

$+P(X\times1, Y\times3, Z\times1)$

$+P(X\times1, Y\times1, Z\times3)$

$+P(X\times2, Y\times2, Z\times1)$

$+P(X\times1, Y\times2, Z\times2)$ 同じ

$+P(X\times2, Y\times1, Z\times2)$

$=2\times\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{2}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

$+\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$+\frac{5!}{2!2!}\times\left(\frac{2}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

$+2\times\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2$

$=\frac{640+80+480+480}{5^5}$

$=\frac{128+16+96+96}{625}$

$=\frac{336}{625}$

(4) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおく

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3\cos\theta\\\sqrt{3}+3\sin\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+\sqrt{3}b+3(a\cos\theta+b\sin\theta)\\c+\sqrt{3}d+3(c\cos\theta+d\sin\theta)\end{pmatrix}$

より

$\begin{cases}a+\sqrt{3}b=1,\ \sqrt{a^2+b^2}=1\\c+\sqrt{3}d=\sqrt{3},\ \sqrt{c^2+d^2}=1\end{cases}$

$\downarrow$

$(1-\sqrt{3}b)^2+b^2=1$

$\Leftrightarrow 4b^2-2\sqrt{3}b=0$

$\Leftrightarrow b=0, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore (a,b)=(1,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$(\sqrt{3}-\sqrt{3}d)^2+d^2=1$

$\Leftrightarrow 2d^2-3d+1=0$

$\Leftrightarrow d=1, \frac{1}{2}$

$(c,d)=(0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

より

$A=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ …①, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&1\end{pmatrix}$ …②, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

となるが

$a\cos\theta+b\sin\theta=\cos\varphi$

$c\cos\theta+d\sin\theta=\sin\varphi$

であることを考えると①、②は不適.

$\therefore A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ //

(5) (与式)

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx$ $x+\frac{\pi}{4}=t$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sin t}dt$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt$ $\cos t=u$

$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{(-1)}{1-u^2}du$

$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u^2}du$

$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\frac{1}{2}du$

$= \cdots$

$= \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$= \log(3+2\sqrt{2}) = \underline{2\log(\sqrt{2}+1)}$ //

[II]

(1) $P_2(x)$

$= \{(x^2-a^2)^2\}''$

$= \{4(x^2-a^2)x\}'$

$= 8x^2 + 4(x^2-a^2)$

$\therefore P_2(-a) = \underline{8a^2}$ //

$P_3(x)$

$= \{(x^2-a^2)^3\}'''$

$= \{6(x^2-a^2)^2 x\}''$

$= \{24(x^2-a^2)x^2 + 6(x^2-a^2)^2\}'$

$= 48x^3 + 48(x^2-a^2)x$

$\quad + 24(x^2-a^2)x$

$\therefore P_3(-a) = \underline{-48a^3}$ //

(2)

(i) $n=1$ のとき

$(uv)^{(1)} = u^{(1)}v + uv^{(1)}$

より成立.

(ii) $n=m$ のとき

与式が成立つとする.

$(uv)^{(m+1)}$

$= \{(uv)^{(m)}\}'$

$= \{{}_mC_0 u^{(m)}v + {}_mC_1 u^{(m-1)}v'$

$+ \cdots + {}_mC_k u^{(m-k)}v^{(k)} + \cdots + {}_mC_m uv^{(m)}\}'$

$= {}_mC_0 u^{(m+1)}v + {}_mC_0 u^{(m)}v'$

$+ {}_mC_1 u^{(m)}v' + {}_mC_1 u^{(m-1)}v^{(2)}$

$+ {}_mC_2 u^{(m-1)}v^{(2)} + {}_mC_2 u^{(m-2)}v^{(3)}$

$+ \cdots$

$+ {}_mC_m u^{(1)}v^{(m)} + {}_mC_m uv^{(m+1)}$

$= u^{(m+1)}v$

$+ \sum_{i=1}^{m} ({}_mC_{i-1} + {}_mC_i) u^{(m+1-i)} v^{(i)}$

$+ uv^{(m+1)}$

ここで

${}_mC_{i-1} + {}_mC_i$

$= \frac{m!}{(i-1)!(m-i+1)!} + \frac{m!}{i!(m-i)!}$

$= \frac{m!(i+m-i+1)}{i!(m-i+1)!}$

$= {}_{m+1}C_i$

より

$(uv)^{(m+1)}$

$= {}_{m+1}C_0 u^{(m+1)}v$

$+ \sum_{i=1}^{m} {}_{m+1}C_i u^{(m+1-i)} v^{(i)}$

$+ {}_{m+1}C_{m+1} uv^{(m+1)}$

$= \sum_{i=0}^{m+1} {}_{m+1}C_i u^{(m+1-i)} v^{(i)}$

より $n=m+1$ のときも成立.

(i)(ii)よりすべての自然数 n において与式は成立.

(3) $P_n(x) = \{(x^2-a^2)^n\}^{(n)}$

$= \{(x+a)^n(x-a)^n\}^{(n)}$

$= n!(x-a)^n + n\cdot\{(x+a)^n\}^{(n-1)}\cdots$

$+ \cdots + n!(x+a)^n$

より途中の項は $(x+a)$ または $(x-a)$ の因数をもつので

$P_n(-a) = n!(-2a)^n$

$= (-2)^n n! a^n$

$P_n(a) = n!(2a)^n$

$= \underline{2^n n! a^n}$ //

[III]

(1) $y = -\frac{p}{2}x^2 + q$

$\Leftrightarrow 2y = -px^2 + 2q$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{p}(q-y)$

円と連立

$\frac{2}{p}(q-y) + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 - \frac{2}{p}y + \frac{2q}{p} - 1 = 0$

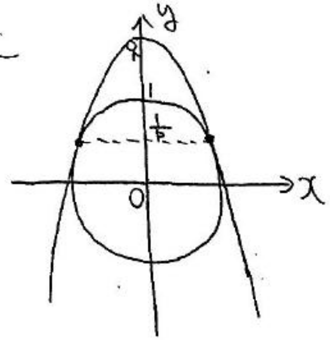
接するので

$\frac{D}{4} = \left(-\frac{1}{p}\right)^2 - \frac{2q}{p} + 1$

$= \frac{p^2+1-2pq}{p^2} = 0$

$\therefore\ p^2+1-2pq=0 \cdots ①$

また



重解のとき図より

$0<\frac{1}{p}<1$

$\therefore\ p>1$

①より（相加平均）≧（相乗平均）から

$q=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)\geqq\frac{1}{2}2=1$

等号成立は $p=1$.

つまり $p>1$ のとき $q>1$

$\therefore$ 関係式

$p^2+1-2pq=0$

範囲

$p>1,\ q>1$ //

(2)

$0=-\frac{p}{2}x^2+q$

$\Leftrightarrow\ px^2=2q$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{2q}{p}}$

S

$=\int_{-\sqrt{\frac{2q}{p}}}^{\sqrt{\frac{2q}{p}}}\left(-\frac{p}{2}x^2+q\right)dx$

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{2q}{p}}+\sqrt{\frac{2q}{p}}\right)^3$

$=\frac{2p}{3}\left(\frac{2q}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{2p}{3}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{2p(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3p^3}$

$=\frac{2(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3p^2}$ //

$\xrightarrow{p^2=t}\ =\frac{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3t}$

(3)

$\frac{dS}{dt}=\frac{3(t+1)^{\frac{1}{2}}3t-2(t+1)^{\frac{3}{2}}3}{9t^2}$

$=\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}\{3t-2(t+1)\}}{3t^2}$

$=\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}(t-2)}{3t^2}$

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$\frac{dS}{dt}$	×	$-$		$+$
S	×	↘	$\sqrt{3}$	↗

$\therefore\ t=2\Leftrightarrow p=\sqrt{2}$ のとき

最小値 $\sqrt{3}$ //