2013 日本医科大

1

(1)

$|A-kE|$

$=\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ -3 & 6-k \end{vmatrix}$

$=(1-k)(6-k)-2(-3)$

$=k^2-7k+12=0$

$\therefore \underline{k=3, 4}$ //

(2)

$3P+4Q=A$

$-)\ 4P+4Q=4E$

$-P=A-4E=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore P=\underline{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$ //

$Q=E-P=\underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$ //

(3) $P^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$ //

$Q^2=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$ //

$PQ=P(E-P)=P-P^2=\underline{O}$ //

$QP=(E-P)P=P-P^2=\underline{O}$ //

(4)

A^n

$=(3P+4Q)^n$

$=3^nP^n+4^nQ^n\ (\because PQ=QP=O)$

$=3^nP+4^nQ\ (\because P=P^2, Q=Q^2)$

$=\underline{\begin{pmatrix} 3^{n+1}-2\cdot4^n & -2\cdot3^n+2\cdot4^n \\ 3^{n+1}-3\cdot4^n & -2\cdot3^n+3\cdot4^n \end{pmatrix}}$ //

(5)

$|C-kE|$

$=\begin{vmatrix} a-1-k & 1 \\ a^2-2a-7 & 2a-k \end{vmatrix}$

$=\{(a-1)-k\}(2a-k)-a^2+2a+7$

$=k^2-(3a-1)k+a^2+7=0 \cdots ①$

$D=(3a-1)^2-4(a^2+7)$

$=5a^2-6a-27$

$=(5a+9)(a-3)=0$

$\therefore \underline{a=3}$ // $(\because a>0)$

①に代入すると $\underline{k=4}$ //

(6)

$N=C-4E=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$N^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$=\underline{O}$ //

(7)

C^n

$=(N+4E)^n$

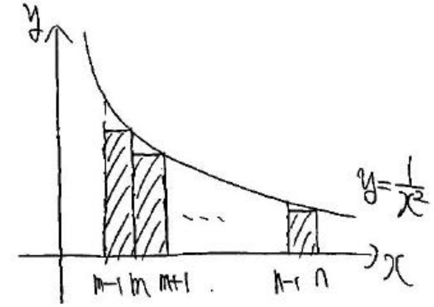
$=\underset{O}{N^n}+\cdots+{}_nC_{n-1}N\cdot(4E)^{n-1}+(4E)^n$

$=n\cdot4^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} -2n\cdot4^{n-1}+4^n & n\cdot4^{n-1} \\ -n\cdot4^n & 2n\cdot4^{n-1}+4^n \end{pmatrix}}$ //

2

(1)



$y=\frac{1}{x^2}$は単調減少なので、図より

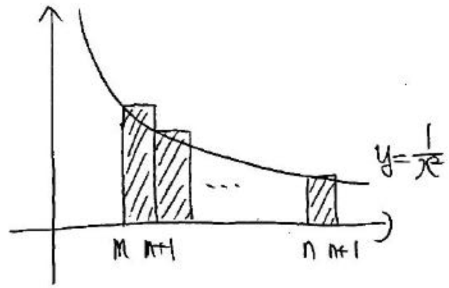
$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}$

$<\int_{m-1}^{n}\frac{1}{x^2}dx$

$=\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-1}^{n}$

$=-\frac{1}{n}+\frac{1}{m-1}$

$=\frac{n+1-m}{n(m-1)}$



同様に

$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}$

$>\int_{m}^{n+1}\frac{1}{x^2}dx$

$=\left[-\frac{1}{x}\right]_{m}^{n+1}$

$=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m}=\frac{n+1-m}{m(n+1)}$

(2) (1)の式に$m=2$を代入すると

$\frac{n-1}{2(n+1)}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$

$\Leftrightarrow$

$1+\frac{n-1}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n-1}{n}$

すべての辺に$n\to\infty$とすれば

$\frac{3}{2}\leq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leq 2$

(5) $m=3$でも甘いので(1)に
$m=4$を代入すると

$$\frac{n-3}{4(n+1)} < \frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \frac{n-3}{3n}$$

すべての辺に $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{49}{36}$ をたすと

$$\frac{49}{36}+\frac{n-3}{4(n+1)} < 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \frac{49}{36}+\frac{n-3}{3n}$$

すべての辺に $n\to\infty$ とすれば

$$\frac{29}{18} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \leqq \frac{61}{36}$$

3

(1)

$I_0(x)$

$$=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$$

(Cは積分定数) //

$I_{k+1}(x)$

$$=\int\frac{1}{x^2}(\log x)^{k+1}dx$$

$$=-\frac{1}{x}(\log x)^{k+1}-\int\left\{-\frac{k+1}{x^2}(\log x)^k\right\}dx$$

$$=-\frac{(\log x)^{k+1}}{x}+(k+1)I_k$$ //

$I_4(x)$

$$=-\frac{(\log x)^4}{x}+4I_3$$

$$=-\frac{(\log x)^4}{x}+4\left(-\frac{(\log x)^3}{x}+3I_2\right)$$

$$=-\frac{(\log x)^4}{x}-\frac{4(\log x)^3}{x}-\frac{12(\log x)^2}{x}$$

$$-\frac{24\log x}{x}-\frac{24}{x}+C$$

(Cは積分定数) //

(2)

$$p(x)=\frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}-\log x$$

$$p'(x)=\frac{1}{e}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-e}{ex}$$

x	0	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$p'(x)$	×	−	0	+
$p(x)$	×	↘	0	↗

$\therefore p(x)\geqq 0$

$\therefore \log x \leqq \frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ //

(3)
(a) $f(x)=\dfrac{2\log x-(\log x)^2}{x^2}$

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

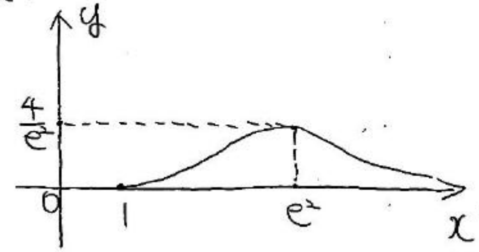
$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$$

(2)より

$$0<\frac{(\log x)^2}{x}\leqq\frac{9}{e^2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{e^2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=0$$ より

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$



(b)

S_n

$$=\int_n^{n^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_n^{n^2}=\frac{7}{3}(\log n)^3$$ //

(c)

V_n

$$=\pi\int_n^{n^2}\frac{(\log x)^4}{x^2}dx$$

$$=\pi\left[I_4(x)\right]_n^{n^2}$$

$$=\pi\{I_4(n^2)-I_4(n)\}$$

$$=-\frac{16(\log n)^4}{n^2}-\frac{32(\log n)^3}{n^2}-\frac{48(\log n)^2}{n^2}$$

$$-\frac{48\log n}{n^2}-\frac{24}{n^2}$$

$$+\frac{(\log n)^4}{n}+\frac{4(\log n)^3}{n}+\frac{12(\log n)^2}{n}$$

$$+\frac{24\log n}{n}+\frac{24}{n}$$

$$=\frac{\pi}{n^2}\{(n-16)(\log n)^4+4(n-8)(\log n)^3$$

$$+12(n-4)(\log n)^2+24(n-2)\log n$$

$$+24(n-1)\}$$ //

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nV_n}{(\log n)S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3nV_n}{7(\log n)^4}$$

$$=\frac{3}{7}\pi$$ //

注目するのは
V_nの先頭の項だけ