2013 慈恵医大

1.

(1) $P(x_1=2)$

$= P(\text{積が偶数})$

$= 1-P(\text{積が奇数})$

$= 1-\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$ //

$P(x_3=3\cap x_4=5)$

$=P(\text{奇}\to\text{奇}\to\text{奇}\to\text{偶})$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}=\frac{3}{256}$ //

$P(x_2=4)$ ← 2回で到達

$=P(\text{偶}\to\text{偶})=\frac{9}{16}$

$P(x_2=3)$ ← 3回で到達

$=P(\text{奇}\to\text{偶})+P(\text{偶}\to\text{奇})$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{6}{16}$

$P(x_2=2\cap x_3=4)$ ← 3回で到達

$=P(\text{奇}\to\text{奇}\to\text{偶})=\frac{3}{64}$

$P(x_3=3)$ ← 4回で到達

$=P(\text{奇}\to\text{奇}\to\text{奇})=\frac{1}{64}$

(期待値)

$=2\cdot\frac{9}{16}+3\left(\frac{6}{16}+\frac{3}{64}\right)+4\cdot\frac{1}{64}$

$=\frac{72+3\cdot 27+4}{64}=\frac{157}{64}$ //

(2) $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|=1\\|2\vec{a}+\vec{b}|=1\end{cases}$

↓ 2乗

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$-)\ 4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$-3-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

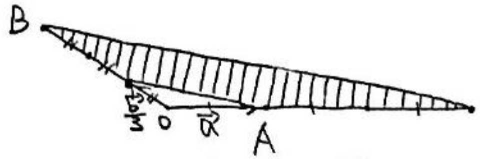
$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$

$1-3+|\vec{b}|^2=1$

$\therefore\ |\vec{b}|^2=3\quad |\vec{b}|=\sqrt{3}$ //

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+3t\cdot\frac{\vec{b}}{3}$

和が1から3まで



$\cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \angle AOB=150^\circ$

(面積)

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 150^\circ\times\frac{8}{9}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ //

2.

(1) $C_1: y=2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

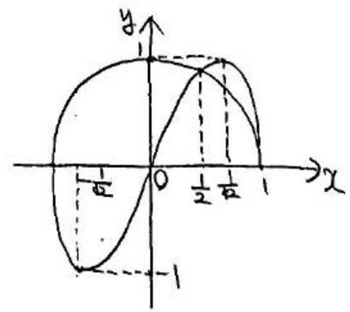
$y'=2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+2x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

$=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

C_1が奇関数より $x\geqq 0$ のみ調べる。

x	$0\cdots\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots 1$
y'	$+\ 0\ -$
y	$0\nearrow 1\searrow 0$

なお C_2 は半円となるのでグラフは



P_1とP_2が一致するのは

$2t\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-t^2}$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ // $(\because -1<t<1)$

(2)

(l_tの傾き)$=\frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\cdots$①

$m_t:\ tx+\sqrt{1-t^2}\,y=1$

(m_tの傾き)$=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdots$②

①=②より

$2(1-2t^2)=-t$

$\Longleftrightarrow\ 4t^2-t-2=0$ //

$\alpha=\frac{1-\sqrt{33}}{8},\ \beta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ //

(3)

(i)

$l_t:\ y=\frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}(x-t)+2t\sqrt{1-t^2}$

$m_t:\ tx+\sqrt{1-t^2}\,y=1$

↓ 連立

$tx+2(1-2t^2)(x-t)+2t(1-t^2)=1$

$\Longleftrightarrow\ (-4t^2+t+2)x=-2t^3+1$

$\Longleftrightarrow\ x=\frac{2t^3-1}{4t^2-t-2}$

$\sqrt{1-t^2}\,y=\frac{4t^2-t-2-2t^4+t}{4t^2-t-2}$

$=-2\frac{t^4-2t^2+1}{4t^2-t-2}$

$\therefore\ y = y_t = -\dfrac{2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{4t^2-t-2}$ //

(ii)

$y_t{}'$

$= -2\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{1-t^2}(-2t)(4t^2-t-2)-(1-t^2)^{\frac{3}{2}}(8t-1)}{(4t^2-t-2)^2}$

$= -2\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{-3t(4t^2-t-2)-(1-t^2)(8t-1)}{(4t^2-t-2)^2}$

$= -2\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{-4t^3+2t^2-2t+1}{(4t^2-t-2)^2}$

$= 2\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{(2t-1)(2t^2+1)}{(4t^2-t-2)^2}$

$t=\frac{1}{2}$で$y_t{}'$が負から正に変わるので

このとき最小。

$\min y_t = -\dfrac{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{1}{2}-2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ //

3.

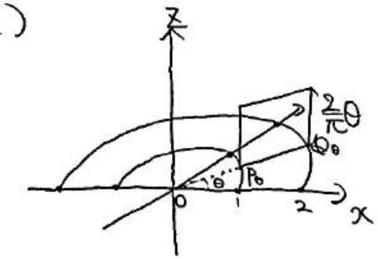
(1) $z=t$のとき

$x^2+y^2+t^2 \leqq 2^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leqq 4-t^2$

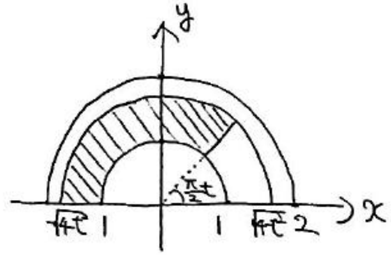
$(半径) = \sqrt{4-t^2}$ //

(2)



BとKの共通部分Lを$z=t$で

切った断面は



上の図のように$\sqrt{4-t^2} \geqq 1$つまり

$t \leqq \sqrt{3}$のときLが存在する。

(断面積)

$= \{(\sqrt{4-t^2})^2\pi - 1\cdot1\cdot\pi\} \times \dfrac{\pi-\frac{\pi}{2}t}{2\pi}$

$= (3-t^2)\pi \times \dfrac{2-t}{4}$

$= \dfrac{\pi}{4}(t^3-2t^2-3t+6)$

より

(Lの体積)

$= \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{\pi}{4}(t^3-2t^2-3t+6)\,dt$

$= \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+6t\right]_0^{\sqrt{3}}$

$= \left(\sqrt{3}-\dfrac{9}{16}\right)\pi$ //

4.

(1) lの方向ベクトルを$\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$とすると

l上の点(t, kt)はfによって

$\begin{pmatrix}a&-1\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\kt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a-k)t\\dkt\end{pmatrix}$

よりm上の点$((a-k)t, dkt)$

に移る。mの方向ベクトルが

$\begin{pmatrix}a-k\\dk\end{pmatrix}$なので$l$と$m$が垂直だから

$\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a-k\\dk\end{pmatrix}$

$= dk^2-k+a=0 \quad \cdots ①$

これをみたすkの実数解がただ1つなので

$D=(-1)^2-4da$

$=1-4ad=0 \quad \therefore ad=\dfrac{1}{4}$ //

(2) $P(t, kt)$とおくと

$OP=\sqrt{t^2+k^2t^2}=1 \quad \therefore t=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

$(\because t>0)$

これより

$Q\left(\dfrac{a-k}{\sqrt{1+k^2}}, \dfrac{dk}{\sqrt{1+k^2}}\right)$.

ところで①が重解より

$k=\dfrac{1}{2d}$.

OQ^2

$= \dfrac{a^2-2ak+k^2+d^2k^2}{1+k^2}$

$= \dfrac{a^2-\frac{a}{d}+(1+d^2)\frac{1}{4d^2}}{1+\frac{1}{4d^2}}$

$= \dfrac{4a^2d^2-4ad+1+d^2}{4d^2+1}$

$= \dfrac{\frac{1}{4}-1+1+d^2}{4d^2+1} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore OQ = \dfrac{1}{2}$ //

直線PQは$P\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$より

$y=\dfrac{dk-k}{a-k-1}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Rのy座標y_Rは

$y_R=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\dfrac{(d-1)k}{(a-k-1)\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{(a-k-1-d+1)k}{(a-k-1)\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{(a-d-k)k}{(a-k+1)\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{\left(a-d-\frac{1}{2d}\right)\frac{1}{2d}}{\left(a-\frac{1}{2d}+1\right)\sqrt{1+\frac{1}{4d^2}}}$

このときORの長さは最小.

$$= \frac{2ad - 2d^2 - 1}{(2ad - 1 - 2d)\sqrt{4d^2+1}}$$

$$= \frac{-2d^2 - \frac{1}{2}}{\left(-2d - \frac{1}{2}\right)\sqrt{4d^2+1}}$$

$$= \frac{4d^2+1}{(4d+1)\sqrt{4d^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{4d^2+1}}{4d+1} = g(d) \text{ とおく.} \quad (d>0)$$

$g'(d)$

$$= \frac{\frac{1}{2}(4d^2+1)^{-\frac{1}{2}} 8d\,(4d+1) - \sqrt{4d^2+1}\,4}{(4d+1)^2}$$

$$= 4\,\frac{4d^2+d-(4d^2+1)}{(4d+1)^2\sqrt{4d^2+1}}$$

$$= 4\,\frac{d-1}{(4d+1)^2\sqrt{4d^2+1}}$$

d	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(d)$	$\times$	$-$	0	$+$
$g(d)$	$\times$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\nearrow$

$d=1$のとき最小をとる.

$\therefore\ a=\frac{1}{4},\ d=1$ //